



FECHA

Diciembre, 17 del 2020

HORA

Inicio de Prueba: 16:00 hora de Lima - Perú
Finalización de Prueba: 20:00 hora de Lima – Perú

PUNTAJE

Respuesta Correcta	Puntaje:	+15
Respuesta Incorrecta	Puntaje:	0
Respuesta sin contestar	Puntaje:	0

Todas las preguntas tienen la misma ponderación, pero no necesariamente tienen el mismo grado de dificultad.

Puede hacer uso de los recursos de la web, pero NO está permitido compartir información con otros participantes.

1. Sea N el menor número natural tal que al escribir los números naturales del 1 al N , el dígito 3 aparece 17 veces más que el dígito 7; y sea m el producto de los dígitos de N . ¿Cuántos números naturales del 1 al N son primos relativos con m ?

A) 168 B) 182 C) 295 D) 144 E) 156

2. Consideremos el conjunto $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Denotemos por A_k ($k > 1$) a la familia de conjuntos formado por todos los subconjuntos de A con más de un elemento donde el mayor elemento es k . Así tenemos como ejemplos: $A_2 = \{\{1; 2\}\}$, $A_3 = \{\{1; 3\}; \{2; 3\}; \{1; 2; 3\}\}$. Además, S_k denota a la suma de los elementos de cada elemento de A_k , así, por ejemplo: $S_2 = 1+2 = 3$; $S_3 = (1+3) + (2+3) + (1+2+3) = 15$. Halle el valor de $S_6 - S_5$.

A) 199 B) 91 C) 215 D) 182 E) 271

3. En una urna hay 20 fichas numeradas del 1 al 20, además las fichas numeradas con un número primo son de color azul y el resto de fichas son de color rojo. Consideremos el experimento aleatorio de extraer 3 fichas de dicha urna, y se definen los siguientes eventos:

A: al menos una de las fichas extraídas es de color azul.

B: el producto de los números correspondientes a las fichas extraídas es un cuadrado perfecto.

¿Cuántos elementos tiene el evento $C = A \cap B$?

A) 28 B) 29 C) 30 D) 31 E) 27

4. La media y la varianza de siete observaciones son 8 y 16, respectivamente. Si 5 observaciones vienen dadas por 2, 4, 10, 12, 14, entonces el producto de las dos observaciones restantes es.

A) 45 B) 48 C) 40 D) 49 E) 36

5. Luego de resolver el siguiente sistema:

$$x^4 + y^4 + xy(x^2 + y^2) = 4a^2(a^2 + 3b^2) \quad \wedge \quad xy(x+y)^2 = 4a^2(a^2 - b^2)$$

y considerando que $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, determine un valor de $\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$:

A) $\sqrt{\frac{a}{b}}$ B) $\sqrt{\frac{b}{a}}$ C) $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ D) $\frac{a}{b}$ E) $\frac{b}{a}$

6. Determine la siguiente suma:

$$\frac{1}{2(\sqrt{x+1})} + \frac{1}{2^2(\sqrt[4]{x+1})} + \frac{1}{2^3(\sqrt[8]{x+1})} + \dots + \frac{1}{2^n(\sqrt[2^n]{x+1})}$$

A) $\frac{1}{nx-1}$

B) $\frac{1}{x+1}$

C) $\frac{n}{x-n}$

D) $\frac{1}{x-n}$

E) $\frac{1}{x-1}$

7. El coeficiente de x^7 en la expresión $(1+x)^{10} + x(1+x)^9 + x^2(1+x)^8 + \dots + x^{10}$ es.

A) 420

B) 330

C) 120

D) 210

E) 180

8. El valor del término independiente de x en la expansión de $\left(\frac{x+1}{x^{2/3}-x^{1/3}+1} - \frac{x-1}{x-x^{1/2}}\right)^{10}$ es.

A) 180

B) 210

C) 240

D) 270

E) 300

9. Si α y β son las raíces distintas de la ecuación $x^2 + (3)^{1/4}x + (3)^{1/2} = 0$. Si el valor de $\alpha^{96}(\alpha^{12} - 1) + \beta^{96}(\beta^{12} - 1)$ tiene la forma $a^{a \cdot b^a} \cdot b^b(b^{b^b} - a)$ determine a / b .

A) 3/2

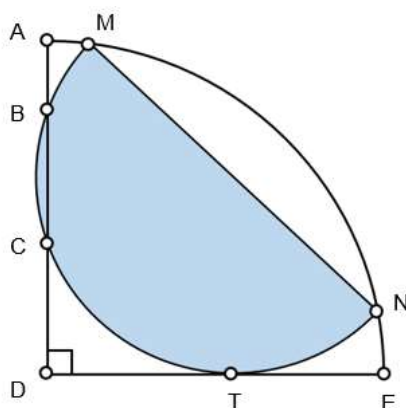
B) 2/3

C) 2

D) 1/2

E) 4

10. En la figura se muestra un cuarto de círculo ADE y un semicírculo de diámetro MN. Si $AB = 1$ y $CD = 2$, encuentra BC.



A) 2

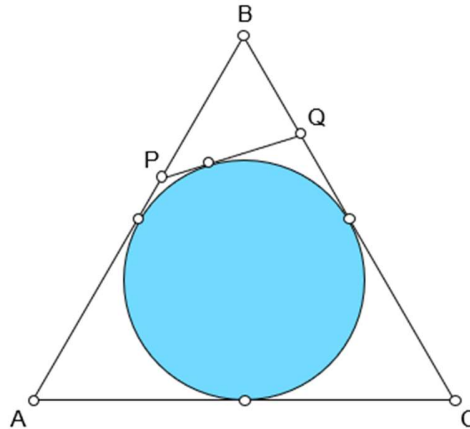
B) 3

C) $\sqrt{5}$

D) $\sqrt{6}$

E) $\sqrt{7}$

11. En la figura, ABC es un triángulo equilátero. Sobre los lados AB y BC se toman P y Q de modo que PQ sea tangente al círculo inscrito en ABC.

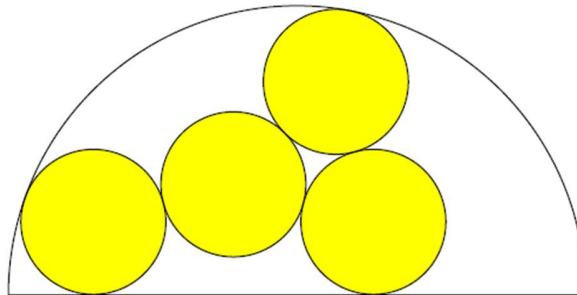


Encuentre la longitud del lado del triángulo ABC si se cumple que:

$$\frac{1}{AP} + \frac{1}{QC} = \frac{1}{2021}$$

- A) 2021 B) 4042 C) 6063 D) $4042\sqrt{3}$ E) $\frac{2021}{3}$

12. En la siguiente figura sea R el radio del semicírculo y r el radio de los cuatro círculos pequeños.



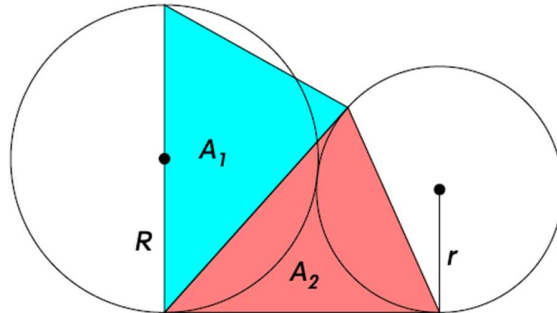
Si se cumple que:

$$\frac{r}{R} = \frac{a}{a+b\sqrt{a(a+\sqrt{a}+\sqrt{b+\sqrt{a}})}}$$

determine a/b .

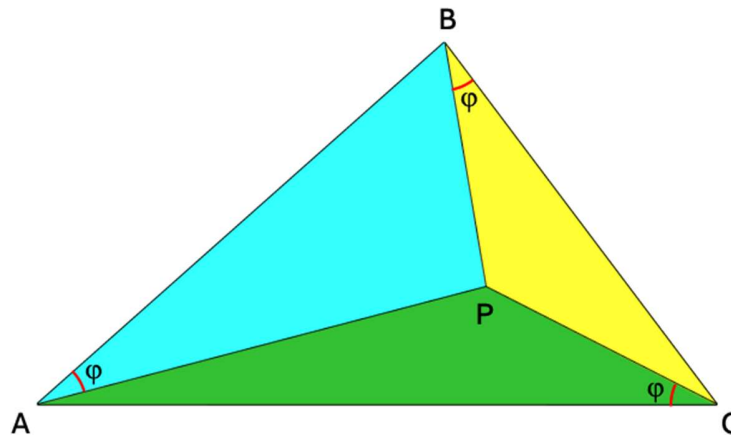
- A) 2 B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{5}{3}$ E) $\frac{3}{5}$

13. En la siguiente figura las dos circunferencias son tangentes y la de radio r es tangente a dos de los lados del triángulo de área A_2 . Obtener el cociente de las áreas A_1/A_2 en términos de R y r .



- A) $\frac{R}{r}$ B) $\frac{R}{r} - \frac{1}{2}$ C) $\frac{R}{r} - \frac{1}{3}$ D) $\frac{R}{r} - \frac{1}{4}$ E) $\frac{R}{r} - \frac{1}{5}$

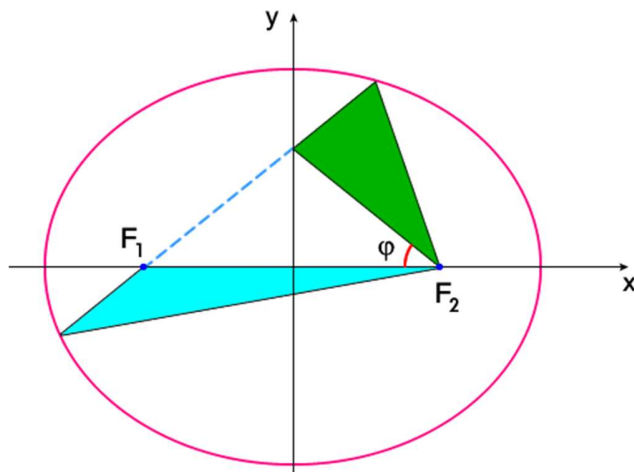
14. En el triángulo ABC las áreas de las regiones triangulares ABP, BCP y CAP están en la misma razón que los números 36, 16 y 25 respectivamente.



Determine $\tan \varphi$.

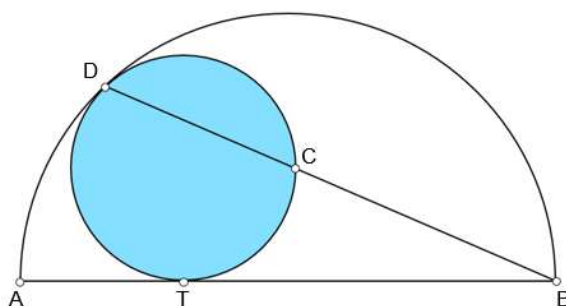
- A) 0,73 B) 0,68 C) 0,51 D) 0,47 E) 0,39

15. La gráfica corresponde a la elipse con centro en el origen de coordenadas, F_1 y F_2 , son sus focos y su excentricidad es igual a e . Si las áreas de las regiones triangulares sombreadas son iguales, determine $\tan(\varphi)$ en términos de la excentricidad de la cónica.



- A) e B) $e/2$ C) e^2 D) $\sqrt{1-e}$ E) $\sqrt{1-e^2}$

16. Se muestra a un círculo tangente en D a la semicircunferencia ADB, y tangente en T al diámetro AB.



Si se cumple que: $\frac{AT}{TB} = \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad \wedge \quad \frac{DC}{CB} = \text{sen } \varphi$

Determine aproximadamente el ángulo φ .

- A) 30° B) 37° C) 53° D) $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)$ E) $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{6}}{5}\right)$

17. Si el valor de $\lim_{x \rightarrow 0} (2 - \cos x \sqrt{\cos 2x})^{\frac{x+2}{x^2}}$ es igual a e^a , luego a es igual a. (e : número de Euler)

- A) -2 B) -1 C) 1 D) 2 E) 3

18. Los lados de un paralelepípedo son de una unidad de longitud y son paralelos a los vectores unitarios no-coplanares \bar{a} , \bar{b} y \bar{c} tal que:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot \bar{c} = \bar{b} \cdot \bar{c} = \frac{1}{2}$$

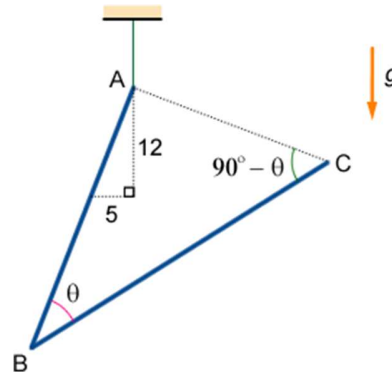
El volumen del paralelepípedo es.

- A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ B) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ C) $3\sqrt{2}$ D) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ E) $\frac{1}{3\sqrt{3}}$
19. La distancia más corta entre la recta $y = x$ y la curva $y^2 = x - 2$ es.
- A) $\frac{5}{\sqrt{2}}$ B) $\frac{5}{2\sqrt{2}}$ C) $\frac{7}{\sqrt{2}}$ D) $\frac{7}{2\sqrt{2}}$ E) $\frac{7}{4\sqrt{2}}$
20. Si $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 + y^2}$; $y(1) = 1$ y $y(x_0) = e$, entonces x_0 es igual a. (e : número de Euler)

Sugerencia: Para resolver esta ecuación diferencial se sugiere hacer el siguiente cambio de variable: $y = wx$, siendo $w = w(x)$.

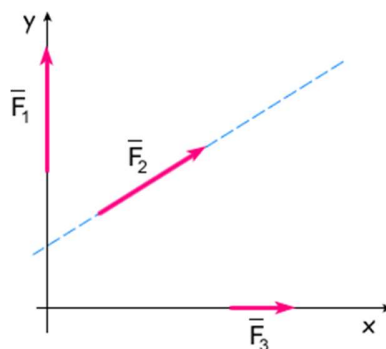
- A) $\sqrt{2(e^2 - 1)}$ B) $\sqrt{2(e^2 + 1)}$ C) $\sqrt{3}e$ D) $\sqrt{\frac{e^2 + 1}{2}}$ E) $\sqrt{\frac{e^2 - 1}{2}}$

21. Si la barra doblada ABC se encuentra en equilibrio en la forma que se indica, determine aproximadamente el ángulo θ .



- A) 30° B) 37° C) $53^\circ/2$ D) $\tan^{-1}(\frac{2}{3})$ E) $\tan^{-1}(\frac{5}{6})$

22. La figura muestra un sistema formado por tres fuerzas de magnitudes $F_1 = F_2 = 5 \text{ N}$ y $F_3 = 2 \text{ N}$.



Si la ecuación de la línea de acción de F_2 es:

$$3x - 4y + 20 = 0$$

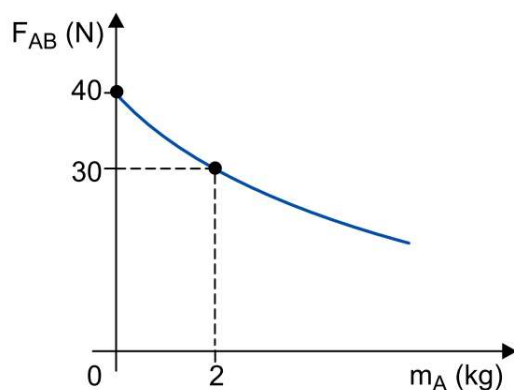
determine la ecuación de la línea de acción de la fuerza resultante.

- A) $2x - y + 5 = 0$ B) $6x - 3y + 10 = 0$ C) $4x - 3y + 10 = 0$
 D) $8x - 6y + 5 = 0$ E) $x - y + 2 = 0$

23. Dos cajas, A y B, descansan sobre una superficie plana y horizontal. A la caja A se aplica con una fuerza horizontal y constante, como se muestra en la figura.



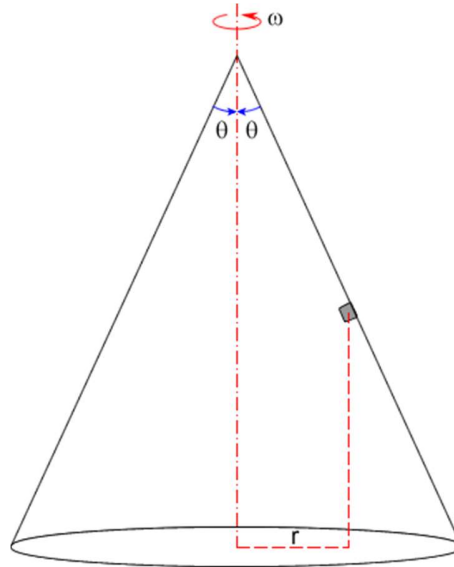
El gráfico mostrado a continuación representa como varía la magnitud de la fuerza ejercida por A sobre B en función de la masa de A, m_A , manteniendo constante la masa de B, m_B .



Despreciando toda clase de rozamiento y la resistencia del aire, la aceleración del sistema cuando $m_A = 2 \text{ kg}$ será.

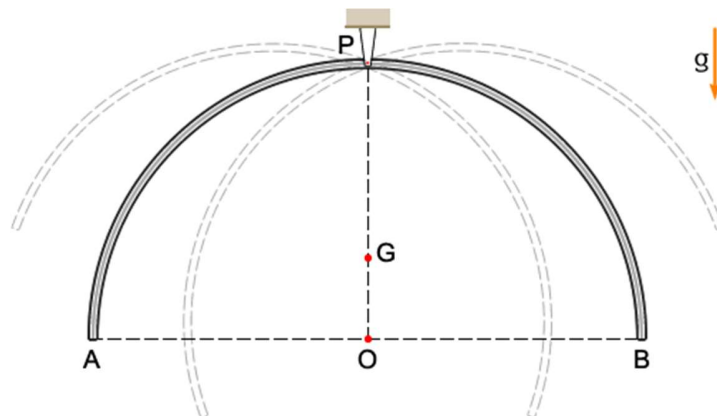
- A) 1 m/s^2 B) 4 m/s^2 C) 2 m/s^2 D) 3 m/s^2 E) 5 m/s^2

24. Un cascarón cónico interiormente hueco se encuentra rotando alrededor de un eje vertical en la forma que se muestra en la figura. Si sobre su superficie interior se encuentra adherido un pequeño bloque, determine la mínima frecuencia con que debe rotar el sistema para que el bloque no resbale. El coeficiente de rozamiento entre las superficies en contacto es 0,5. ($\text{sen } \theta = 0,28$; $g = 10 \text{ ms}^{-2}$)



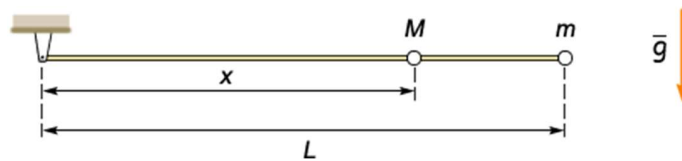
- A) 60 RPM B) 90 RPM C) 120 RPM D) 150 RPM E) 180 RPM

25. Un aro delgado semicircular, uniforme y homogéneo, se encuentra oscilando en un plano vertical alrededor de un pequeño pin horizontal que pasa por el punto P y equidista de sus extremos A y B. Determine en qué relación se encuentra su energía cinética de traslación de su centro de masas y su energía cinética de rotación respecto de un eje horizontal que pasa por su centro de masas, cuando este se encuentra en movimiento. Se sabe que O es el centro geométrico del aro, G es su centro de masas y se cumple que $\pi \cdot \overline{OG} = \overline{AB}$.



- A) $\frac{1-\frac{1}{\pi}}{1+\frac{1}{\pi}}$ B) $\frac{1-\frac{2}{\pi}}{1+\frac{2}{\pi}}$ C) $\frac{1-\frac{3}{\pi}}{1+\frac{3}{\pi}}$ D) $\frac{2-\frac{1}{\pi}}{2+\frac{1}{\pi}}$ E) $\frac{3-\frac{1}{\pi}}{3+\frac{1}{\pi}}$

26. Una varilla de masa despreciable y longitud L se encuentra articulada en un extremo y una esferilla de masa m se encuentra unida al otro extremo. Este sistema puede rotar libremente en un plano vertical alrededor de un eje horizontal fijo que pasa por la articulación sin fricción. La varilla se mantiene en posición horizontal. ¿A qué distancia x de la articulación debe colocarse una segunda esferilla de masa $M = m$, de modo que esta caiga lo más rápido posible cuando se suelte del reposo?

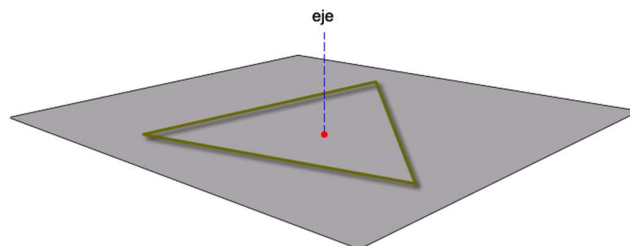


- A) $\sqrt{2}L$ B) $\sqrt{3}L$ C) $(\sqrt{2}-1)L$ D) $(\sqrt{3}-1)L$ E) N.A.

27. Un asteroide de masa m ($m \ll m_{\text{Tierra}}$) se acerca con una velocidad de 12 km/s cuando se encuentra a una distancia de $10R$ del centro de la Tierra (donde R es el radio de la Tierra). Cuando llega a la superficie de la Tierra, su velocidad es aproximadamente en km/s. ($R = 6,4 \cdot 10^6$ m).

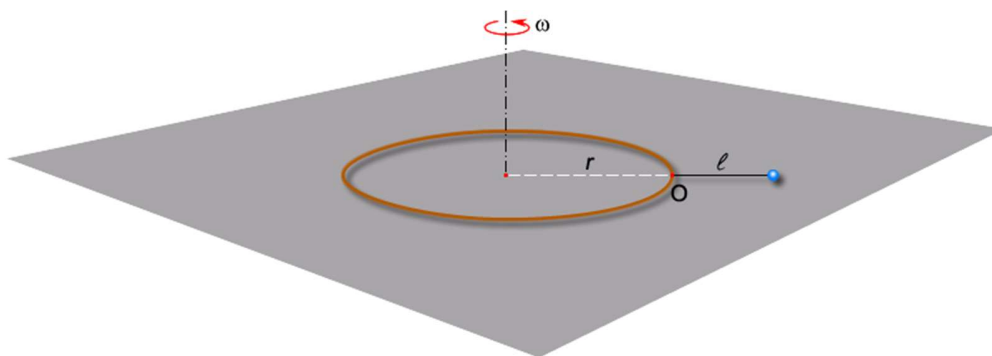
- A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

28. La figura muestra un sistema formado por tres varillas delgadas idénticas, de masa m y longitud ℓ cada una, unidos entre sí formando un triángulo equilátero. Este sistema se encuentra sobre una superficie horizontal lisa. Determine el trabajo que debe realizar un agente externo sobre este sistema para que este adquiera solo un movimiento de rotación pura con una rapidez angular ω respecto de un eje vertical que pasa por su centro de masas.



- A) $\frac{1}{2}m\ell^2\omega^2$ B) $\frac{1}{4}m\ell^2\omega^2$ C) $\frac{3}{4}m\ell^2\omega^2$ D) $\frac{1}{8}m\ell^2\omega^2$ E) $\frac{3}{8}m\ell^2\omega^2$

29. Un aro circular de radio r mostrado en la figura rota con una velocidad angular constante ω alrededor de un eje vertical. Fijado al punto O se encuentra un péndulo simple que se encuentra en reposo respecto del aro. Si la lenteja del péndulo se aleja ligeramente de su posición de equilibrio relativo, este comenzará a oscilar respecto del aro. Determine el periodo de estas pequeñas oscilaciones despreciando la masa de la lenteja. (g : aceleración de la gravedad; ℓ : longitud del péndulo)

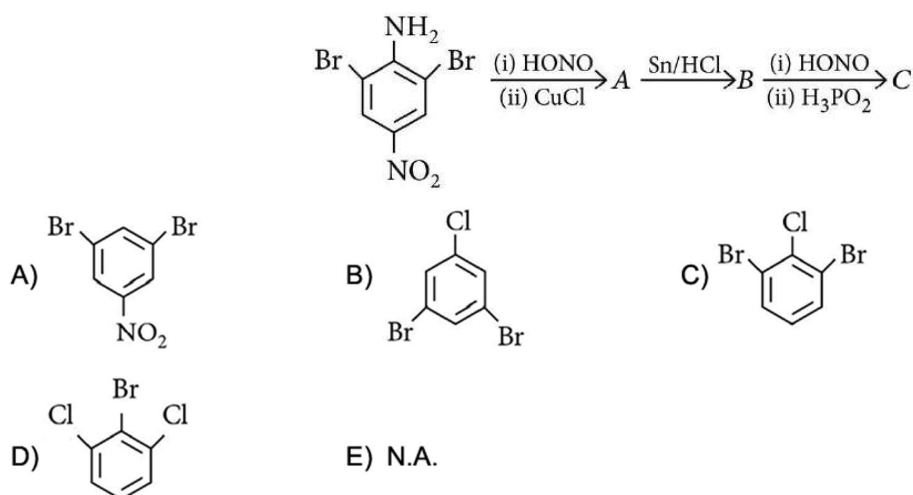


- A) $2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$ B) $2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ C) $\frac{2\pi}{\omega}\sqrt{\frac{\ell}{r}}$ D) $\frac{2\pi}{\omega}\sqrt{\frac{r+\ell}{r}}$ E) $\frac{2\pi}{\omega}\sqrt{\frac{r}{r+\ell}}$
30. Hay tres contenedores C_1 , C_2 y C_3 llenos de un mismo líquido a temperaturas diferentes. Cuando mezclamos volúmenes diferentes (en litros) de estos contenedores obtenemos las temperaturas finales de equilibrio mostradas en la siguiente tabla. Determine el valor de la temperatura final T_x , en $^{\circ}\text{C}$, que se indica en esta tabla.

C_1	C_2	C_3	$T(^{\circ}\text{C})$
1ℓ	2ℓ	0	60
0	1ℓ	2ℓ	30
2ℓ	0	1ℓ	60
1ℓ	1ℓ	1ℓ	T_x

- A) 40 B) 45 C) 50 D) 55 E) 60

31. El producto (C) obtenido en la siguiente secuencia de reacciones es. RPT C



32. Una mezcla gaseosa contiene igual número de moléculas de N_2 y SF_6 , parte de ella se hace pasar por un aparato de efusión gaseosa. ¿Cuántas moléculas de N_2 están presentes en el producto gaseoso por cada 100 moléculas de SF_6 ?

- A) 57 B) 117 C) 171 D) 228 E) 285

33. Una muestra de $AgCl$ fue tratada con 5,00 mL de solución de 1,5 M Na_2CO_3 para dar Ag_2CO_3 . La solución restante contenía 0,0026 g de Cl^- por litro. La solubilidad del producto $AgCl$ es $x \times 10^{-10}$. El valor de x es. ($K_{sp}Ag_2CO_3 = 8,2 \times 10^{-12}$)

- A) 1,31 B) 1,41 C) 1,51 D) 1,61 E) 1,71

34. Un mol de N_2H_4 pierde 10 moles de electrones para formar un nuevo compuesto Y. Suponiendo que todo el nitrógeno aparece en el nuevo compuesto, ¿cuál es el estado de oxidación del nitrógeno en Y? (No hay cambio en el estado de oxidación del hidrógeno).

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

35. ¿Cuál de las siguientes no es una oxidación redox? RPT A
- A) $\text{CaCO}_3 \longrightarrow \text{CaO} + \text{CO}_2$ B) $\text{Na} + \text{H}_2\text{O} \longrightarrow \text{NaOH} + \frac{1}{2} \text{H}_2$
 C) $\text{MnCl}_3 \longrightarrow \text{MnCl}_2 + \frac{1}{2} \text{Cl}_2$ D) $\text{O}_2 + 2\text{H}_2 \longrightarrow 2\text{H}_2\text{O}$
 E) Todas son redox
36. ¿Cuál de los siguientes es el orden correcto de disminución de la naturaleza básica de los óxidos?
- A) Na_2O , MgO , Al_2O_3 , CuO B) CuO , Al_2O_3 , MgO , Na_2O
 C) Al_2O_3 , CuO , MgO , Na_2O D) CuO , MgO , Na_2O , Al_2O
 E) Na_2O , CuO , Al_2O_3 , MgO
37. Una solución ácida de sal Cu^{2+} que contiene 0,4 g de Cu^{2+} se electroliza hasta que se deposite todo el cobre. Se continúa la electrólisis durante siete minutos más, manteniendo el volumen de la solución a 100 mL y la corriente en 1,2 amperios. Calcule el volumen (en mL) de los gases desprendidos en CNPT durante toda la electrólisis.
- A) 158,3 B) 168,3 C) 178,3 D) 188,3 E) 198,3
38. El número total de reacciones en que el hidrógeno es liberado es.
- $\text{LiH} + \text{H}_2\text{O} \rightarrow$ $\text{LiH} + \text{C}_2\text{H}_5\text{OH} \rightarrow$ $\text{LiH} + \text{HC} \equiv \text{CH} \rightarrow$
 $\text{LiH} + \text{HCl} \rightarrow$ $\text{LiH} + \text{NH}_3 \rightarrow$ $3\text{CaH}_2 + \text{N}_2 \rightarrow$
 $\text{B}_2\text{H}_6 + 2\text{NaH} \rightarrow$
- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7
39. El análisis muestra que un óxido metálico tiene una fórmula empírica $\text{M}_{0,96}\text{O}_{1,00}$. El porcentaje del ión M^{2+} en este cristal es.
- A) 91,67% B) 8,33% C) 45,83% D) 22,92% E) 20,46%
40. ¿Cuál será la masa de NaCl producida cuando una solución acuosa de hidróxido de sodio de 1,00 mol L^{-1} se neutraliza con 200 mL de ácido clorhídrico acuoso de 2,00 mol L^{-1} ?
- A) 23,4 g B) 58,5 g C) 29,2 g D) 87,7 g E) 42,6 g

Créditos

La elaboración de esta prueba ha sido posible gracias a la colaboración de un grupo de docentes e investigadores que de una manera desinteresada han aportado problemas, en su mayoría inéditos, para esta justa académica.

Consideramos que las personas que participan de este tipo de eventos de este aspiran a ser más competitivos académicamente y nuestro compromiso es de seguir en esta brega y hacer que año tras año nuestros eventos de competencia online tengan mayor cobertura.

Eternamente agradecido al equipo creativo de este año 2021.

[Francisco Javier García Capitán](#) 

[Roberto Vizurraga](#) 

[Ángel Silva Palacios](#) 

[Rubén Huillca Guevara](#) 

[Luis Manrique](#) 

[Thiago Felício de Souza](#) 

[Orlando Ramírez](#) 

